Mise en orbite d'un projectile

Lorsque le projectile est lancé avec une vitesse trop importante, il peut finir par se trouver en orbite autour de la Terre.

Rq : Généralement, c'est une situation qui n'est pas fortuite, mais recherchée et/ou étudiée.

On ne peut alors plus considérer un référentiel terrestre comme galiléen. Il faut utiliser un autre référentiel, plus adapté (géocentrique, héliocentrique, jupitérocentrique, … selon les cas)

Approche historique expérimentale : lois de Kepler

Solitaire sur une île déserte de la mer Baltique, l'astronome Johannes Kepler a pu établir au début du XVIIe siècle trois lois expérimentales pour décrire le mouvement des planètes autour du Soleil.

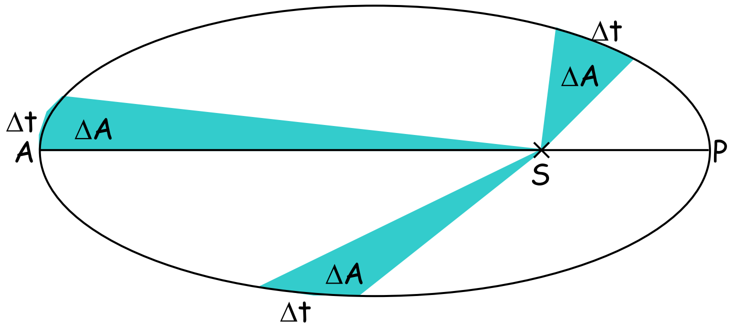
1. *Première loi de Kepler.*

Dans un référentiel héliocentrique, les planètes décrivent des trajectoires elliptiques planes dont le centre S du Soleil est l'un des foyers.

2. *Deuxième loi de Kepler : Loi des Aires.*

Pendant une durée donnée Δt, le rayon qui joint le centre S du Soleil au centre de la Terre balaie une aire ΔA constante, quelle que soit la position de la Terre sur son orbite.

Une étude systématique des orbites des autres planètes l'amènera à généraliser la loi des aires aux autres planètes et astres (comètes, …) tournant autour du Soleil. Le rapport $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ dépend alors de l'astre considéré.



Pendant une durée donnée Δt, le rayon qui joint le centre S du Soleil au centre d'une planète balaie une aire ΔA constante, quelle que soit la position de la planète sur son orbite.

Rq : Lorsque la distance d'une planète au centre du Soleil est minimale ou maximale, celle-ci se trouve respectivement au périhélie P ou à l'aphélie A de son orbite. La loi des aires permet d'affirmer que la vitesse de la planète est maximale en P et minimale en A.

3. *Troisième loi de Kepler.*

$$\frac{T^2}{a^3} = K_s$$

T : période de révolution de la planète autour du Soleil. (en secondes)

a : longueur du demi grand axe de la trajectoire elliptique de la planète. (en mètres)

K_S : constante ne dépendant pas de la planète considérée, mais uniquement du Soleil.

$K_S = 2{,}97.10^{-19}\ s^2.m^{-3}$

Rq : Les trois lois de Kepler ne s'appliquent pas qu'aux astres tournant autour du Soleil, mais également aux satellites d'une planète, aux planètes d'autres systèmes planétaires, ou encore aux étoiles tournant autour d'un trou noir.
La constante K dépend alors de l'astre autour duquel on gravite.

Approche théorique : Interaction gravitationnelle

On peut donner une expression simple de la force d'interaction gravitationnelle dans le cadre des deux approximations suivantes :

- Les deux systèmes en interaction ont une répartition de masse à symétrie sphérique. La masse volumique de ces objets ne dépend que de la distance au centre.
- La taille des systèmes en interaction est faible devant la distance qui les sépare. On peut ainsi négliger les dimensions de ces objets par rapport à leur éloignement.

$$F_{A\to B} = G\frac{m_A m_B}{AB^2}$$

G = 6,67.10^{-11} m^3.kg^{-1}s^{-2} : constante de gravitation.

Rq : *A exerce une force sur B, mais B exerce aussi une force sur A telle que :*

$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{F_{B\to A}} = -\overrightarrow{F_{A\to B}} \\ \text{même droite d'action}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{directement opposées}$$

On retrouve la troisième loi de Newton.

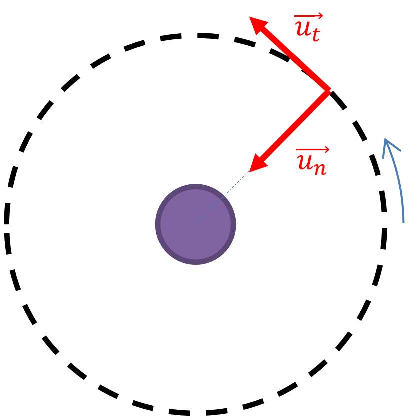
Repère de Frenet

Pour faciliter l'étude d'un mouvement circulaire, il peut être judicieux de changer d'approche. On ne prend plus un repère fixe, mais un repère mobile, lié au système étudié. Un tel repère est appelé repère de Frenet.

1. Définition.

A un instant t donné, on peut définir, dans le plan de la trajectoire d'un objet, une base orthonormée $(\overrightarrow{u_t}, \overrightarrow{u_n})$ telle que :

- Le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_t}$ est tangent au cercle décrit par G et orienté dans le même sens que sa trajectoire.
- Le vecteur unitaire $\overrightarrow{u_n}$ est perpendiculaire à $\vec{\tau}$ et dirigé vers le centre du cercle décrit par G.



2. Interaction gravitationnelle et repère de Frenet.

Dans le repère de Frenet, l'interaction gravitationnelle s'écrit :

$$\overrightarrow{F_G} = \frac{Gm_A m_B}{r^2}\overrightarrow{u_n}$$

Ses coordonnées sont donc : $\overrightarrow{F_G}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{Gm_A m_B}{r^2}\end{pmatrix}$

3. Vitesse et repère de Frenet.

Dans le repère de Frenet, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v} = v\overrightarrow{u_t}$$

Ses coordonnées sont donc : $\vec{v}\binom{v}{0}$

4. Accélération et repère de Frenet.

Dans le repère de Frenet, le vecteur accélération s'écrit :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t} + \frac{v^2}{r}\overrightarrow{u_n}$$

Ses coordonnées sont donc : $\vec{a}\begin{pmatrix}\frac{dv}{dt} \\ \frac{v^2}{r}\end{pmatrix}$